Μάθημα 18ο: 22/05/2020

Έστω $\gamma(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, $t \in [\alpha, \beta]$

με $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^2$ C^1, δηλ. $\exists\ \gamma'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ $\forall\, t \in [\alpha, \beta]$

και $f : \gamma([\alpha, \beta]) \to \mathbb{R}^2$ συνεχής με

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{pmatrix}, \ \forall\, (x,y) \in \gamma([\alpha,\beta])$$

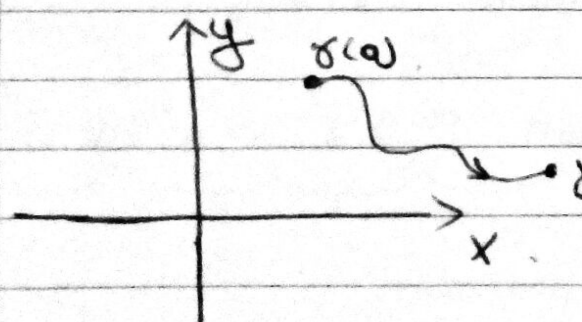
και η $\gamma' : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^2$ είναι συνεχής, τότε

$$\int_\gamma f \cdot d(x,y) = \int_\alpha^\beta f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)$$

$$= \int_\alpha^\beta \begin{pmatrix} u(\gamma(t)) \\ v(\gamma(t)) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} dt$$

$$= \int_\alpha^\beta \left[u(\gamma(t)) \cdot x'(t) + v(\gamma(t)) \cdot y'(t) \right] dt$$

Σχήμα



Προσοχή: Το αποτέλεσμα του μιγαδικού επικαμπύλιου ολοκληρώματος είναι ένας μιγαδικός αριθμός.

Πρόταση 2.2.1 « Ιδιότητες του μιγαδικού επικαμπύλιου ολοκληρώματος »

Έστω $\gamma : [a,\beta] \to \mathbb{C}$, C^1 : καμπύλη, $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$

$f, g : \gamma([a,\beta]) \to \mathbb{C}$: συνεχείς τότε

(α) $\int_\gamma (\lambda f + \mu g)(z)dz = \lambda \int_\gamma f(z)dz + \mu \int_\gamma (z)dz$

(β) Εάν $\gamma_1 = \gamma|[a,s]$, $\gamma_2 = \gamma|[s,\beta]$ τότε $\int_\gamma f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz + \int_{\gamma_2} f(z)dz$

(γ) $\left|\int_\gamma f(z)dz\right| \leq \|f\| \cdot L(\gamma)$

Απόδειξη

$$\left|\int_\gamma f(z)dz\right| \underset{\text{ορ.}}{=} \left|\int_a^\beta f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt\right|$$

$$\leq \int_a^\beta \underbrace{|f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)|}_{= g(t) : [a,\beta] \to \mathbb{R}^2} dt \quad \left(\text{τριγωνική ανισότητα}\right)$$

$$= \int_a^\beta \underbrace{|f(\gamma(t))|}_{\in \mathbb{R},\ \eta\ [a,\beta] \ni t \mapsto |f(\gamma(t))| \in \mathbb{R}\ \text{είναι συνεχής}} |\gamma'(t)|\, dt \leq \int_a^\beta \|f\| \gamma'(t)\, dt \overset{*}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow \exists \max \{ |f(\gamma(t))| : t \in [a,\beta] \}$$

$$= \max \{ |f(z)| : z \in K_0 \}$$

Προσοχή !!!

$$= \|f\|_{K_0} = \|f\|$$

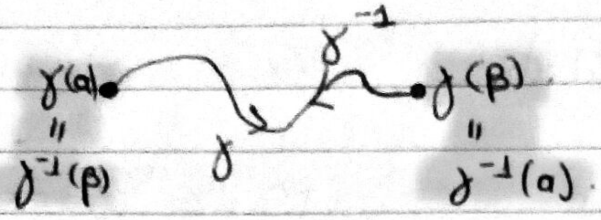
$$\Rightarrow \boxed{|f(\gamma(t))| \leq \|f\|} \in [0, +\infty).$$

$$\overset{*}{\Rightarrow} \left|\int_\gamma f(z)dz\right| \leq \|f\| \int_a^\beta \gamma(t)\, dt$$

$$\boxed{\left|\int_\gamma f(z)dz\right| \leq \|f\| \cdot L(\gamma)} \ \blacksquare$$

δ) $\gamma : [a,\beta] \to \mathbb{C}$, $\gamma^- : [a,\beta] \to \mathbb{C}$.

με $\gamma^-(t) = \gamma(a+\beta-t)$, $t \in [a,\beta]$.



$$(\gamma^-)'(t) = \gamma'(\underbrace{a+\beta-t}_{=\tau})\cdot(-1)$$

$$\Rightarrow \quad |(\gamma^-)'(t)| = |\gamma'(\tau)|$$

$$\int_{\gamma^-} f(z)dz \underset{\text{ορ.}}{=} \int_a^\beta f(\gamma^-(t))\cdot(\gamma^-)'(t)\,dt$$

$$= \int_a^\beta f(\gamma(\underbrace{a+\beta-t}_{=\tau}))\cdot\gamma'(\underbrace{a+\beta-t}_{=\tau})\cdot(-1)\,dt$$

$$= -1\int_\beta^a f(\gamma(\tau))\cdot\gamma'(\tau)\cdot(-1)\,d\tau \quad \left(\text{αφού } \frac{dt}{d\tau} = -1\right)$$

$$= -\int_a^\beta f(\gamma(\tau))\,\gamma'(\tau)\,d\tau$$

$$= -\int_\gamma f(z)dz$$

$$\Rightarrow \boxed{\int_{\gamma^-} f(z)dz = \int_\gamma f(z)dz} \quad ■$$

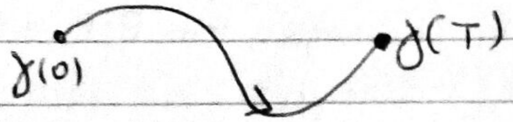
Σχόλιο. Κάναμε την απόδειξη αυτού μέσα στο κουτάκι.

(ε) $\gamma : [0,T] \to \mathbb{C}$.
Θέτουμε $\phi : [0, \frac{T}{2}] \to [0,T]$, $\phi(\tau) = 2\tau = t$

Θεωρούμε την καμπύλη:
$$\tilde{\gamma}(t) = (\gamma \circ \phi)(\tau) = \gamma(\phi(\tau)) \quad , \tau \in [0, \tfrac{T}{2}]$$

$$\Rightarrow \tilde{\gamma}[0, \tfrac{T}{2}] = \gamma(\phi([0, \tfrac{T}{2}]))$$

με $$\tilde{\gamma}'(\tau) = \gamma'(\phi(\tau))\, \phi'(\tau)$$
$$= \gamma'(\phi(\tau)) \cdot 2$$



Άρα όταν η $\gamma \circ \phi$ διατηρεί προσανατολισμό:

$$\boxed{\int_{\gamma\circ\phi} f(z)dz = \int_\gamma f(z)dz}$$

<u>Παρατήρηση 5.2.2:</u>
Αν $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$: μια απλή κλειστή καμπύλη, με δοσμένο προσανατολισμό, διατρέχει το $K = \gamma([\alpha,\beta])$ τότε:
$$\int_K f(z)dz = \int_\gamma f(z)dz .$$

<u>Ειδικότερα</u> αν $K = \partial D(a,r)$ (κύκλος δηλαδή), ο οποίος είναι μια απλή κλειστή καμπύλη, το $\int_\gamma f(z)\,dz$ είναι ανεξάρτητο της παραμετρικοποίησης της γ (διατηρεί τον προσ/σμό !) πολλές φορές σημειώνουμε μόνο το $\gamma([\alpha,\beta])$ αντί για το γ στο ολοκλήρωμα: $\int_{\gamma([\alpha,\beta])} f(z)\,dz$,

το $\int_{\partial D(a,r)} f(z)dz = \int_\gamma f(z)\,dz$

$\quad\ \ \|$

$\odot\ \gamma(t) = ?$

$a \longrightarrow b$

$\gamma(t) = ?$

<u>Ορισμός</u>

$D \subset \mathbb{C}$ ανοικτό, $f: D \to \mathbb{C}$ ονομάζεται <u>ολοκληρώσιμη</u> αν $\exists$ μια συνάρτηση $F: D \to R$ η οποία ονομάζεται παράγουσα της f, $\boxed{F' = f}$ στο D

<u>Θεώρημα 5.2.1</u>: → (Διάβασμα της απόδειξης από τις σημειώσεις του)

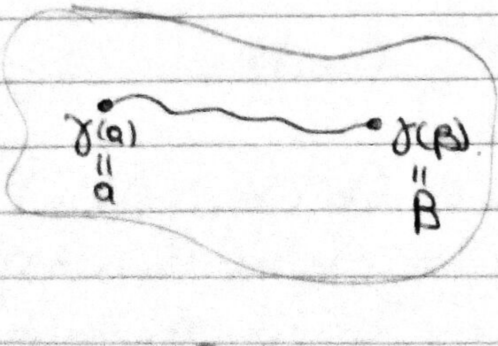
$D \subset \mathbb{C}$ ανοικτό, $f: D \to \mathbb{C}$ συνεχής και $F: D \to \mathbb{C}$. Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(α) η F είναι παράγουσα της f

(β) για κάθε κατά τμήματα C^1-καμπύλη $\gamma: [\alpha, \beta] \to D$ ισχύει:

$$\int_\gamma f(z)dz = F(\gamma(\beta)) - F(\gamma(\alpha))$$

<u>Σχήμα</u>:

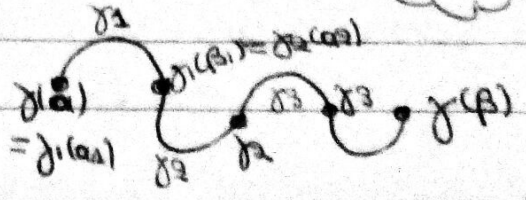


$f: D \to \mathbb{C}$ συνεχής <u>και</u> $\exists\, F: D \to \mathbb{C}$ με $F' = f$

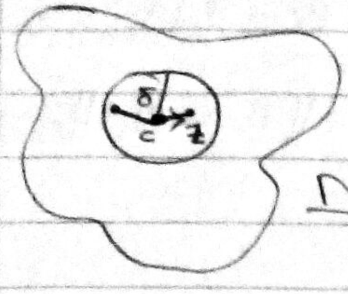
$$\Rightarrow \int_\gamma f(z)dz = F(b) - F(a), \text{ με } F' = f.$$

$\quad\ \|$

$\int_{\tilde{\gamma}} f(z)dz$



<u>Απόδειξη</u> του <u>(β) ⇒ (α)</u> (+ διάβασε και τις σημειώσεις).



<u>Έχουμε:</u> $F(z)-F(c)=\int_{[c,z]} f(\zeta)\,d\zeta$

$$=\int_{\gamma} f(\zeta)\,d\zeta$$

με $\gamma(t)=c+t(z-c)$, $t\in[0,1]$
και $\gamma(0)=c$.

$$F(z)=F(c)+\int_{[c,z]} f(\zeta)\,d\zeta$$

$$F(z)=F(c)+(z-c)\cdot\underbrace{\frac{1}{(z-c)}\cdot\int_{[c,z]} f(\zeta)\,d\zeta}_{\text{από ορισμό } = f(c),\ z=c}\quad ,\forall\, z\in D(c,\delta)$$

$$\Rightarrow \forall\, z\in \dot{D}(c,\delta):\ \frac{F(z)-F(c)}{z-c}=F_1(z).$$

Έστω $\lim_{z\to c} F_1(z)=F_1(c)\underset{\text{ορ.}}{=} f(c)$.

Τότε $F'(c)=f(c)$. ■

$$\int_{[c,z]} 1\,d\zeta = z-c \iff \frac{1}{z-c}\int_{[c,z]} 1\,d\zeta = 1,\ \forall\, z\neq c.$$

$$\Rightarrow f(c)=f(c)\cdot 1 = f(c)\cdot\frac{1}{z-c}\int_{[c,z]} 1\,d\zeta=\frac{1}{z-c}\cdot f(c)\cdot\int_{[c,z]} 1\,d\zeta=$$

$$\underset{\substack{\uparrow\\ \text{γραμμ.}\\ \text{ολ}}}{=}\ \frac{1}{z-c}\int_{[c,z]} f(c)\,d\zeta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |F_1(z) - F_1(c)| \leq \frac{1}{|z-c|} \int_{[c,z]} \underbrace{|(f(\zeta) - f(c))|}_{\leq \|f - f(c)\|_{[c,z]}} d\zeta$$

Υπενθύμιση

f συνεχής στο $c \Leftrightarrow f: D \to \mathbb{C}$

$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall z \in D$ με $|z-c| < \delta : |f(z) - f(c)| < \varepsilon$

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \underbrace{\forall z \in D(c,\delta) : |f(z) - f(c)| < \varepsilon}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\sup\{|f(z) - f(c)| : z \in D(c,\delta)\}}_{= \|f - f(c)\|_{D(c,\delta)}} \leq \varepsilon$$

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \|f - f(c)\|_{D(c,\delta)} \leq \varepsilon$

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall z \in D(c,\delta) : |f(z) - f(c)| \leq \varepsilon.$

$\Rightarrow f$ συνεχής στο c.

Πρόταση 5.2.2 → διάβασε την απόδειξη από τις σημειώσεις

Έστω $D \subset \mathbb{C}$: τόπος, $f: D \to \mathbb{C}$ συνεχής

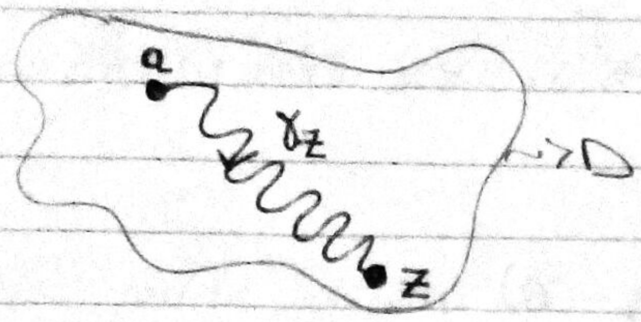
Τ.Α.Ε.Ι:

(α) f είναι ολόκληρη

(β) για κάθε κλειστή κατά τμήματα C^1 καμπύλη $K \subset D$ ισχύει: $\boxed{\int_K f(z)dz = 0}$

D: τόπος $\Rightarrow$ D : ανοιχτό + συνεκτικό

Απόδειξη (β)$\Rightarrow$(α) (Διάβασε και τις σημειώσεις σχήματος)



Ισχυρισμός :

Για $a \in D$ σταθερό και $\forall z \in D$ $\forall \gamma_z \subset D$: C^1
(με $\gamma_z(\beta) = z$
$\gamma_z(a) = w$) η $\boxed{F(z) = \int_{\gamma_z} f(\zeta)\,d\zeta}$ είναι

Παράγουσα της f.

$\gamma_w \oplus \gamma \oplus \gamma_z^-$: είναι κλειστή και C^1 $\underset{(\beta)}{\Rightarrow}$

$$\Rightarrow \underbrace{\int_{\gamma_w \oplus \gamma \oplus \gamma_z^-} f(\zeta)\,d\zeta}_{=} = 0 \Rightarrow \int_{\gamma_w} f(\zeta)\,d\zeta + \int_{\gamma} f(\zeta)\,d\zeta + \int_{\gamma_z^-} f(\zeta)\,d\zeta = 0$$

$$\Rightarrow \underbrace{\int_{\gamma_w} f(\zeta)\,d\zeta}_{\underset{\text{ορ}}{=} F(w)} + \int_{\gamma} f(\zeta)\,d\zeta - \underbrace{\int_{\gamma_z} f(\zeta)\,d\zeta}_{\underset{\text{ορ.}}{=} F(z)} = 0$$

$\Rightarrow$ $F(z) - F(w) = \int_{\gamma} f(\zeta)\,d\zeta$ με $\gamma(a) = w$, $\gamma(\beta) = z$

$\forall \gamma : [a, \beta] \to \mathbb{C}$

$\Rightarrow$ $F(z) = F(w) + \int_{\gamma} f(\zeta)\,d\zeta$ ■

Ασκήσεις / Η.Ο SOS → (όχι όλες αλλά μερικές από αυτές).

→ Παράδειγμα 5.2.1.
→ 65 – 68 ή (63-66 από την παλιά έκδοση των σημειώσεων).
→ Μόνοι σας (ΜΗ ΦΟΒΑΣΤΕ) να κοιτάξτε τις Παρατηρήσεις: 5.2.3 + 5.2.4.